6.2. BIỂU THỨC LÔ–GIC MỜ

6.2.1. Một số toán tử mờ cơ bản

Một đặc trưng của các biểu thức lô–gic mờ là việc sử dụng các toán tử đặc trưng khác với các toán tử lô–gic kinh điển như AND, OR, IMPLY,... hay các toán tử so sánh điều kiện như >, <, = ,...

Nếu như trong lô–gic kinh điển, ta có các phép toán so sánh cơ bản là $x < A$, $x = A$ hay $x > A$ thì trong lô–gic mờ ta thường có tương ứng ba dạng biểu thức mờ cơ bản sau:

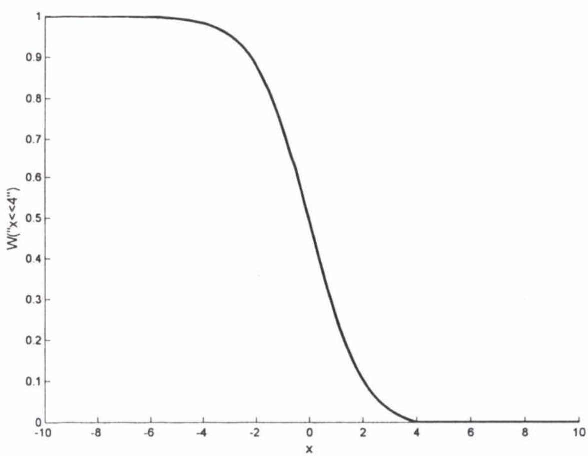
– x nhỏ hơn nhiều so với A: $x \ll A$;

– x xấp xỉ bằng A : $x \approx A$;

– x lớn hơn nhiều so với A : $x \gg A$.

Đối với biểu thức mờ $x \ll A$, ta sẽ có hàm liên thuộc (hay còn gọi là hàm giá trị biểu thức lô–gic) $\mu_{\ll A}(x)$ có dạng "mở trái" như hình 6.1 với $0 \le \mu_{\ll A}(x) \le 1$, được định nghĩa như sau:

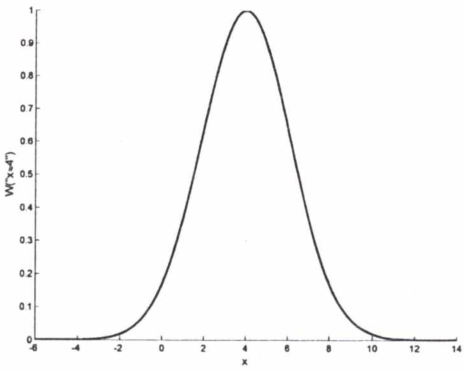
$$\mu_{\ll A}(x) = \begin{cases} \to 1 & khi \quad x \to -\infty \\ \to 0 & khi \quad x \to A^- \\ 0 & khi \quad x \ge A \end{cases} \tag{6.3}$$



Hình 6.1. Hàm liên thuộc của biểu thức mờ "$x \ll 4$"

Đối với biểu thức mờ $x \approx A$, ta sẽ có hàm liên thuộc $\mu_{\approx A}(x)$ có dạng hình chuông (hình 6.2) với $0 \le \mu_{\approx A}(x) \le 1$, được định nghĩa như sau:

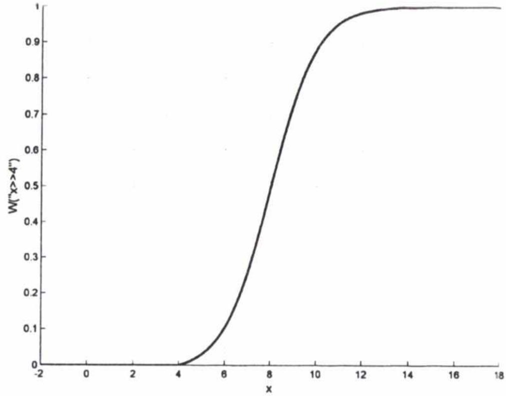
$$\mu_{\approx A}(x) = \begin{cases} 1 & khi \quad x = A \\ \to 0 & khi \quad |x - A| \to \infty \end{cases} \tag{6.4}$$



***Hình 6.2. Hàm liên thuộc hình chuông của biểu thức mờ** " $x \approx 4$ "*

Đối với biểu thức mờ $x \gg A$, ta sẽ có hàm liên thuộc $\mu_{\gg A}(x)$ có dạng "mở phải" như hình 6.3 với $0 \le \mu_{\gg A}(x) \le 1$, được định nghĩa như sau:

$$\mu_{\gg A}(x) = \begin{cases} \to 1 & khi \quad x \to \infty \\ \to 0 & khi \quad x \to A^{+} \\ 0 & khi \quad x \le A \end{cases} \tag{6.5}$$



***Hình 6.3. Hàm liên thuộc của biểu thức mờ** " $x \gg 4$ "*

Các hàm liên thuộc đều có thể được mô tả dưới dạng rời rạc gồm một tập các giá trị liên thuộc hoặc dưới dạng một hàm liên tục ứng với các khoảng liên tục của biến x. Đối với các hàm liên thuộc hình chuông, ta thường sử dụng hàm Gauss mở rộng được mô tả bằng phương trình sau:

$$\mu_{c,b,\sigma}(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\|x-c\|}{\sigma}\right)^{2b}} \tag{6.6}$$

với $b,\sigma \in \mathbb{R}$ và x, c là các véc–tơ. Đây là hàm có ba thông số c, b và σ nên có thể điều chỉnh linh hoạt. Hình dạng của hàm liên thuộc sẽ được thay đổi bởi ba tham số là điểm trung tâm c, độ mở σ và hệ số mũ b. Ví dụ ở giá trị $b = 0,6$ thì hàm có hình dạng gần giống tam giác, $b = 1$ thì hàm có dạng hình chuông còn với $b > 3$ thì hàm có hình dạng gần giống hình thang. Để tìm hiểu rõ hơn về ảnh hưởng của các tham số đến hình dạng của hàm liên thuộc, chúng ta có thể trở lại ví dụ về tập mờ như đã trình bày ở trên:

Xét ví dụ một tập hợp C là tập hợp gồm các số thực gần bằng 4.

$$C = \{x \in \mathbb{R} | x \approx 4\} \tag{6.7}$$

Hàm phụ thuộc $\mu_{\approx 4}(x)$ tại điểm x nào đó phải có giá trị trong khoảng [0,1], tức là:

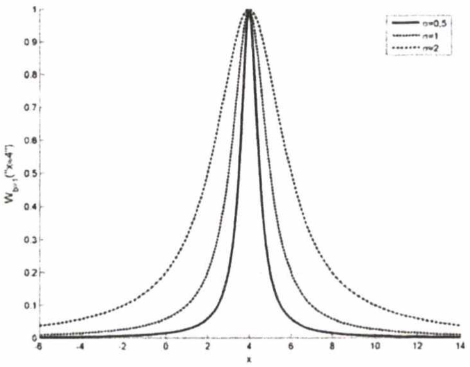
$$0 \le \mu_{\approx 4}(x) \le 1$$

trong đó $\mu_{\approx 4}(x) = 1$ khi $|x-4| = 0$ và $\mu_{\approx 4}(x) \to 0$ khi $|x-4| \to \infty$.

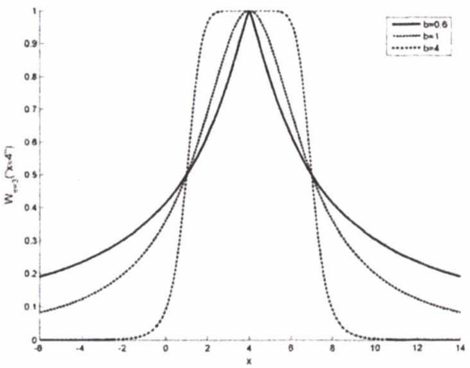
Giả sử chọn giá trị $c = 4$, độ mở $\sigma = 3$, $b = 1$ thì hàm liên thuộc của tập C sẽ là:

$$\mu_{\approx 4}(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-4}{3}\right)^{2}} \tag{6.8}$$

Hình 6.4a mô tả hình dạng của hàm liên thuộc $\mu_{\approx 4}(x)$ với hệ số mũ được chọn cố định $b = 1$ (có dạng hình chuông) và giá trị độ mở σ lần lượt thay đổi bằng 0,5; 1 và 1,5. Trong hình 6.4b ta chọn giá trị độ mở σ cố định bằng 1 và giá trị b thay đổi lần lượt bằng 1 (có dạng hình chuông) và 4 (có dạng hình thang).



(a)



(b)

Hình 6.4. Hàm liên thuộc $\mu_{\approx 4}(x)$

a) với giá trị hệ số mũ b thay đổi và b) với giá trị độ mờ σ ***lần lượt thay đổi***

Từ cách xây dựng hàm $\mu_{\approx 4}(x)$, chúng ta thấy các điểm có giá trị càng gần giá trị điểm trung tâm thì sẽ có giá trị liên thuộc càng lớn và đối với các điểm có giá trị càng xa giá trị điểm trung tâm thì sẽ có giá trị liên thuộc càng nhỏ.

6.2.2. Các toán tử cơ bản trong lô–gic mờ

Trong lô–gic mờ ta cũng có thể sử dụng các toán tử cơ bản như AND, OR, IMPLY,... nhưng cần phải định nghĩa lại về các giá trị hàm chân lý để phù hợp hơn với các ý tưởng của lô–gic mờ. Trong khuôn khổ của phần này, chúng ta sẽ xem xét ba toán tử cơ bản là toán tử VÀ (AND), HOẶC (OR) và SUY RA (IMPLY) trong lô–gic mờ. Ba toán tử này được định nghĩa trong lô–gic kinh điển thông qua các bảng chân lý như trong bảng 6.1 sau.

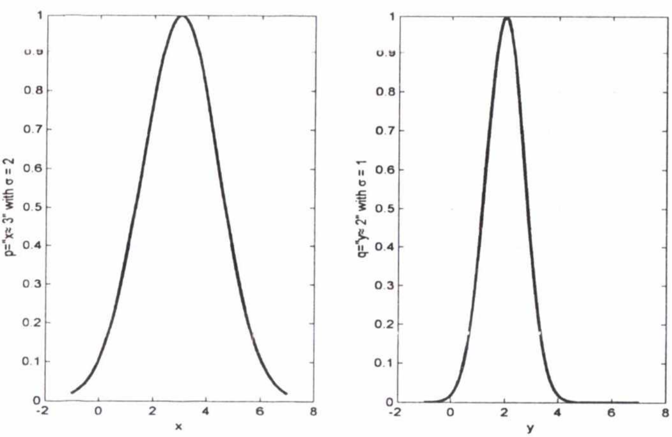
Bảng 6.1. Bảng chân lý của ba toán tử lô–gic kinh điển

Tín hiệu đầu vào		*Hàm toán tử lô–gic*		
p	q	p AND q	p OR q	$p \Rightarrow q$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Để có thể phù hợp hơn đối với các toán tử lô–gic mờ, trong đó các biến lô–gic p và q có thể nhận các giá trị thực nằm trong khoảng [0,1], ta có thể sử dụng các công thức tính giá trị chân lý khác (mà khi sử dụng trong lô–gic kinh điển ta vẫn thu được các kết quả tương đương). Đối với toán tử AND kinh điển, ta có thể thay thế bởi một trong hai hàm sau:

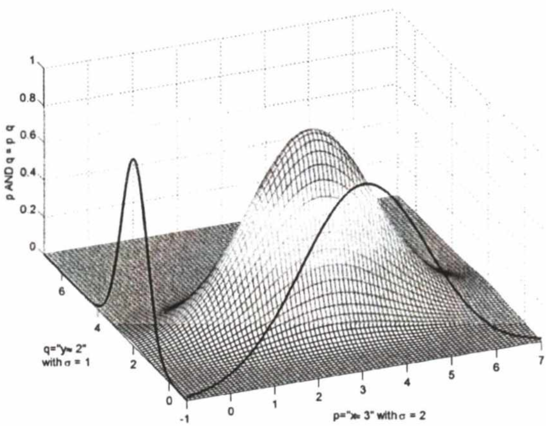
$$p \;\; AND \;\; q \;\equiv\; \min(p,q) \;\equiv\; p \cdot q \tag{6.9}$$

Ta có thể dễ dàng chứng minh được sự tương đương của các công thức trong (6.9) đối với lô–gic kinh điển. Để minh họa cho sự hoạt động trong lô–gic mờ, ta sẽ lấy ví dụ đơn giản sau: xét $p = "x \approx 3"$ theo hàm chuông có độ mở $\sigma = 2$ là $p = e^{-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}$, còn $q = "y \approx 2"$ theo hàm chuông có độ mở $\sigma = 4$ là $q = e^{-\left(\frac{y-2}{4}\right)^2}$. Khi đó ta có hai hàm liên thuộc của hai biến x và y với các giá trị biến thiên như trên hình 6.5:

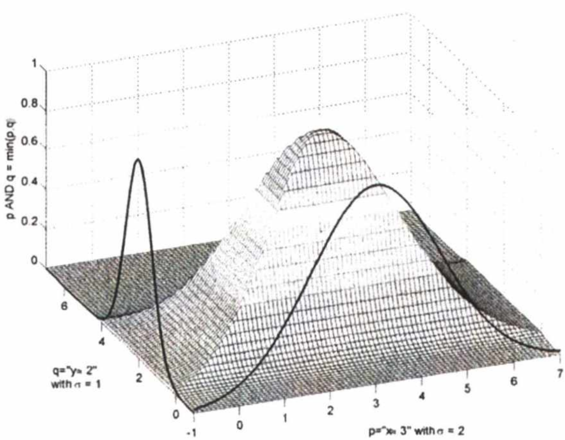


Hình 6.5. Hàm liên thuộc của hai biến $p = "x \approx 3"$ ***(trái) và*** $q = "y \approx 2"$ ***(phải)***

Khi đó ta có phép AND hai biến mờ này theo công thức min và công thức tích cho kết quả là một biến mờ như trên hình 6.6. Ta có thể nhận thấy rằng nếu như trong lô–gic kinh điển, hai công thức cho cùng một kết quả thì đối với lô–gic mờ ta sẽ thu được hai kết quả khác nhau (nhưng có chung hình dạng "chuông" là hàm đạt cực đại tại điểm $(x=3, y=2)$ và giảm dần khi hướng ra bên ngoài). Đồng thời ta thấy rằng hàm tích sẽ có giá trị nhỏ hơn so với hàm min ($\min(p,q) \geq p \cdot q$).



(a)



(b)

Hình 6.6. Hàm liên thuộc của phép AND hai biến $p = "x \approx 3"$ và $q = "y \approx 2"$ tính theo toán tử tích (a) và tính theo toán tử min (b)

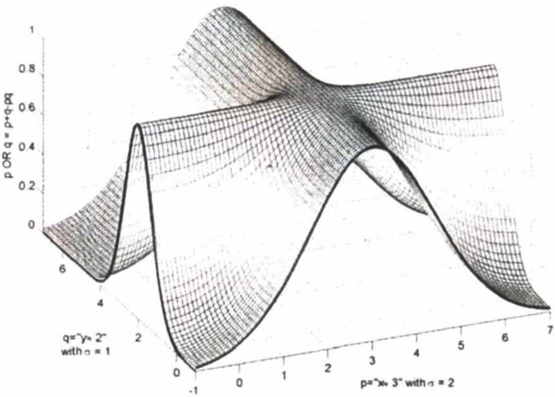
Hoàn toàn tương tự ta cũng có những công thức tương đương để tính toán tử OR trong lô–gic kinh điển như sau:

$$p \;\; OR \;\; q \;\; \equiv \;\; p+q-p\cdot q \tag{6.10a}$$

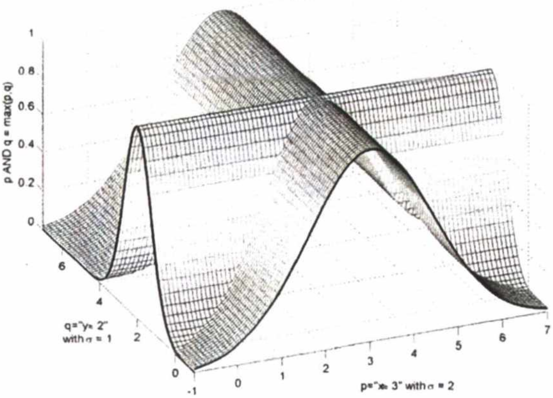
hoặc

$$p \;\; OR \;\; q \;\; \equiv \;\; \max(p,q) \tag{6.10b}$$

Tương ứng với các công thức này, trên hình 6.7 ta có kết quả của hàm liên thuộc phép OR.



(a)



(b)

***Hình 6.7. Hàm liên thuộc của phép OR hai biến** $p = "x \approx 3"$ **và** $q = "y \approx 2"$*

tính theo công thức p + q – pq (a) và theo toán tử max (b)

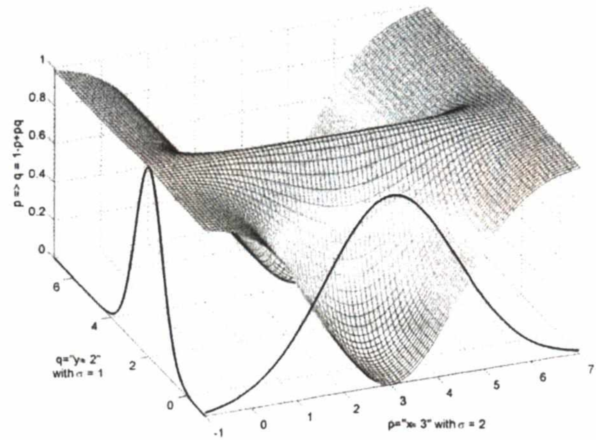
Cho toán tử IMPLY ta có các công thức tương đương như sau:

$$p \Rightarrow q \equiv \max(1-p,q) \tag{6.11a}$$

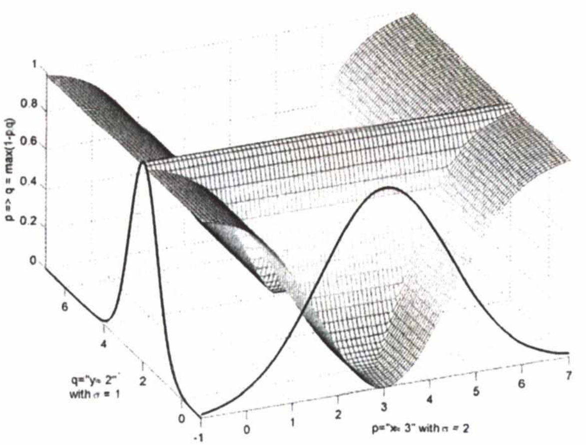
hoặc

$$p \Rightarrow q \equiv 1-p+p\cdot q \tag{6.11b}$$

Tương ứng với các công thức này, ta có kết quả của hàm liên thuộc phép IMPLY trên hình 6.8.



(a)



(b)

Hình 6.8. Hàm liên thuộc của phép IMPLY hai biến** $p = "x \approx 3"$ **và** $q = "y \approx 2"$ **tính theo công thức 1 – p + pq (a) và theo toán tử max (b)

6.3. QUY TẮC SUY LUẬN MỜ VÀ GIÁ TRỊ CỦA QUY TẮC SUY LUẬN MỜ

Trong phần này ta sẽ trình bày về quy tắc suy luận mờ ở dạng "**if** … **then** ..." (hay còn gọi là dạng suy luận "*nếu ... thì ...*"). Trước hết chúng ta làm quen trước với các quy tắc suy luận ở dạng mệnh đề điều kiện **if** … **then** như sau:

if đầu vào là A **then** đầu ra là B (6.12)

Đối với khái niệm suy luận chính xác thì sẽ phải chỉ rõ nếu giá trị đại lượng đầu vào cụ thể bằng bao nhiêu thì giá trị đại lượng đầu ra sẽ phải bằng một giá trị cụ thể nào đó. Cũng tương tự như vậy, một quy tắc suy luận chính xác sẽ có cấu trúc như sau:

$$\textbf{if} \quad x = A \quad \textbf{then} \quad y = B \tag{6.13}$$

tức là khi giá trị x bằng A thì giá trị y sẽ bằng B.

Tuy nhiên một vấn đề đặt ra là với giá trị x bằng A thì chúng ta biết được giá trị y sẽ bằng B nhưng nếu khi giá trị x chỉ "xấp xỉ" bằng A thì liệu chúng ta có biết được giá trị y sẽ bằng bao nhiêu không? Và với các giá trị x lân cận quanh giá trị A với độ "xấp xỉ" khác nhau thì liệu chúng ta có thể tính được giá trị của y hay không? Với sự xuất hiện của của khái niệm "lô–gic mờ", chúng ta hoàn toàn có thể trả lời được những câu hỏi trên thông qua khái niệm quy tắc suy luận mờ.

Một quy tắc suy luận mờ sẽ có cấu trúc như sau:

$$\textbf{if} \quad x \approx A \quad \textbf{then} \quad y \approx B \tag{6.14}$$

tức là nếu x xấp xỉ bằng A thì y sẽ xấp xỉ bằng B, cụ thể khi x đúng bằng A thì chúng ta sẽ có y đúng bằng B. Ở đây khái niệm "xấp xỉ" sẽ được biểu diễn thông qua hàm liên thuộc $\mu_{\approx A}(x)$ và thông qua giá trị của hàm liên thuộc, thì với một giá trị đầu vào x bất kỳ, chúng ta cũng có thể tính được giá trị đầu ra y của quy tắc suy luận mờ như sau:

$$y = B \cdot \mu_{\approx A}(x) \tag{6.15}$$

Quy tắc này thỏa mãn được hai yêu cầu chính:

– Khi x đúng bằng A thì $\mu_{\approx A}(x) = 1$ và ta có y đúng bằng B.

– Khi x có giá trị rất khác A thì $\mu_{\approx A}(x) \to 0$ và ta cũng có $y \to 0$.

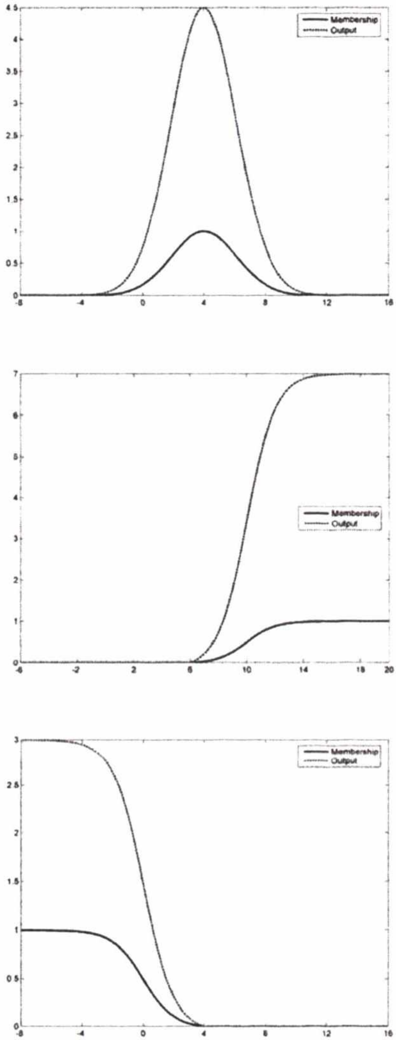
Điểm khác biệt cơ bản giữa quy tắc suy luận mờ và quy tắc suy luận kinh điển là giá trị biểu thức điều kiện của quy tắc suy luận mờ không chỉ nhận giá trị 0 và 1 mà có thể nhận cả các giá trị thực nằm giữa đoạn (0,1).

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có thể gặp các trường hợp sử dụng các phép so sánh "mờ" khác trong phần điều kiện của biểu thức lô–gic mờ, ví dụ như:

$$\textbf{if} \quad x \gg A \quad \textbf{then} \quad y \approx B \tag{6.16}$$

$$\textbf{if} \quad x \ll A \quad \textbf{then} \quad y \approx B \tag{6.17}$$

Đường biểu diễn quan hệ vào – ra cho các biến theo các công thức (6.15), (6.16) và (6.17) được thể hiện trên hình 6.9.



Hình 6.9. Giá trị đầu ra của ba dạng suy luận mờ cơ bản

a) **if** $x \approx 4$ **then** $y \approx 4{,}5$ **;** ***b)*** **if** $x \gg 6$ **then** $y \approx 7$ **;** ***c)*** **if** $x \ll 4$ **then** $y \approx 3$.